MEMENTO CHAPITRE 1 : SÉRIES NUMÉRIQUES

Comment déterminer la nature d'une série $\sum u_n$ en utilisant les critères de comparaison

On détermine, si possible, un équivalent de u_n en l'infini que l'on note v_n.

- Si celui-ci n'est pas de signe constant, on étudie la série de terme général $|v_n|$.
- On compare ensuite l'équivalent obtenu au terme général d'une série de référence : série de Riemann, série géométrique,...

Comment comparer une série $\sum u_n$ à termes positifs à une série de Riemann

- S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Ces résultats sont à redémontrer systématiquement.

Comment déterminer la nature de $\sum u_n$ en utilisant le critère de d'Alembert

Le critère de d'Alembert est particulièrement indiqué lorsque u_n s'exprime sous forme de produit, quotient, contient des factorielles ou des puissances. Pour cela :

- On s'assure que la suite (u_n) est non nulle à partir d'un certain rang.
- On étudie la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Comment étudier la convergence d'une série numérique à l'aide de son caractère télescopique

Si le terme général u_n d'une série s'écrit sous la forme $f(n+1) - f(n)$ où f est une application :

- On calcule la somme partielle d'ordre n par "télescopage" :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(f(k+1)-f(k) = \sum_{k=0}^{n} f(k+1)-\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n+1} f(k)-\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(n+1)-f(0)$$

- On détermine, si elle existe, la limite de f en $+\infty$ et on conclut quant à la nature de la série et la valeur de sa somme éventuelle.

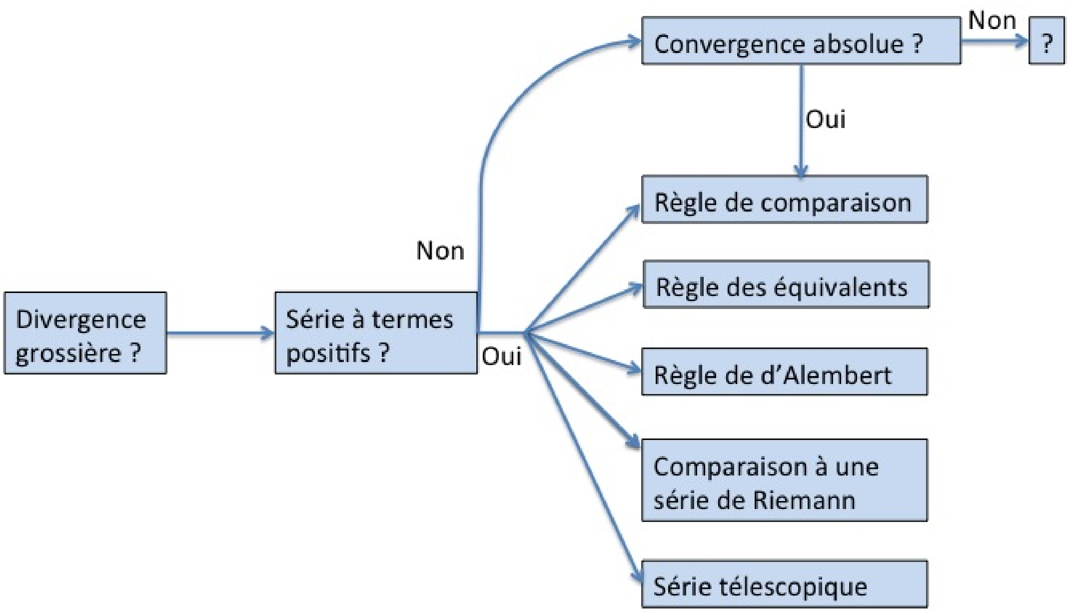
Comment calculer la somme d'une série convergente

— On essaiera de faire apparaître la somme d'une série géométrique (ou une combinaison linéaire de séries géométriques)
— On essaiera de faire apparaître une somme "télescopique".

Comment étudier l'absolue convergence de $\sum u_n$

On calcule $|u_n|$ et on applique les critères de comparaison à $\sum |u_n|$ (équivalence, majoration...)

Synthèse



Erreurs classiques

— Ecrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sans avoir prouvé que la série convergeait.
— Penser qu'une série converge parce que son terme général tend vers 0.
— Décomposer la somme d'une série convergente en la somme des sommes de deux séries divergentes. Il est plus prudent de revenir aux sommes partielles, puis passer à la limite.
— Ne pas reconnaître une somme "télescopique" ou géométrique.