TD 1 : Séries numériques

1 Recherche de la nature d'une série

Exercice 1 Étudier la nature de la série $\sum u_n$:

1) $u_n = 2^{-\frac{1}{n}}$ 2) $u_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 3) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

4) $u_n = 1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 5) $u_n = \sin^3\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 6) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$

7) $u_n = \dfrac{1}{2^n+2}$ 8) $u_n = \dfrac{1}{n^2+\sin n}$ 9) $u_n = \dfrac{1}{2^{nx}}$ avec $x \in \mathbb{R}$

10) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 11) $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$ 12) $u_n = \tan(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}})$

13) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$ 14) $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!}$ 15) $u_n = \left[n\sin(\dfrac{1}{n})\right]^{n^2} - e^{-1/6}$

Exercice 2 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ à l'aide de la règle de d'Alembert :

1) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$ 2) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Exercice 3 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ à l'aide d'une comparaison à une série de Riemann :

1) $u_n = \mathrm{e}^{-n^2}$ 2) $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ 3) $u_n = \dfrac{2n}{n+2^n}$ 4) $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^2}$ 5) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

Exercice 4 Étudier la nature de la série $\sum u_n$:

1) $u_n = (-1)^n\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{3}{2}}}$ 2) $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{n^2+\mathrm{i}}$ 3) $u_n = \dbinom{n}{2}a^{2n}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Exercice 5 Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et convergente.

1. Démontrer que, pour tous réels a et b, on a : $ab \leq \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.
2. En déduire que la série $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ est convergente.

Exercice 6

1. Déterminer une expression simplifiée de la somme partielle de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Quelle est sa nature ?
2. En déduire la nature de la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$.

2 Calcul de la somme d'une série

Exercice 7 Justifier l'existence, puis calculer les sommes infinies suivantes :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}^k}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} \quad \left(\textit{Pour } k \geq 2,\ \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} \right)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right), \quad \left(\textit{Pour } k \geq 2,\ \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) - 2\ln k + \ln(k+1) \right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left[1+\frac{2}{k(k+3)}\right]$$

Exercice 8 On admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$. Justifier l'existence, puis calculer : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!}$
On pourra utiliser l'égalité : $n^2 = n(n-1)+n$

3 Développement décimal d'un réel

Exercice 9 Ecrire les nombres rationnels suivants sous forme de fraction irréductible :

$$x = 0,1717171717..., \quad y = 0,55123123123...$$

Exercice 10

1. Soient $q \in N^*$ et $a_1, ..., a_q$ des entiers compris entre 0 et 9. Montrer que :

$$0,\underbrace{a_1a_2...a_q}\underbrace{a_1a_2...a_q}...\underbrace{a_1a_2...a_q}... = \frac{a_1a_2...a_q}{\underbrace{999...9}_{q\ fois}}$$

2. Ecrire le nombre rationnel $x = 4,29123123123...$ sous forme de fraction irréductible.

4 Exercices

Exercice 11 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2+4n+3}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3}$$

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$$

4. En déduire que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.
5. Pouvait-on prévoir à l'avance que cette série converge ?

Exercice 12 On considère la série $\sum \frac{a^n}{n^2}$, où a est un paramètre.

1. On commence par supposer $a \geqslant 0$.
   (a) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le critère de d'Alembert permet-il de conclure quant à la convergence de cette série ?
   (b) Etudier la convergence de cette série dans les autres cas.
2. On suppose maintenant $a < 0$.
   (a) Montrer que, si $a < -1$, alors la série est grossièrement divergente.
   (b) Montrer que, si $-1 \leqslant a < 0$, alors la série est absolument convergente.
3. Finalement, pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la série est-elle convergente ?

Exercice 13 (La série harmonique et la constante d'Euler)

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$
   Indication : on pourra utiliser l'égalité pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln(k)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déduire de la question précédente un encadrement de S_n pour tout entier $n \geq 2$.
   Indication : pour tout entier $n \geq 2$ fixé, on pourra sommer la précédente inégalité pour k variant de 1 à $n-1$.
3. En déduire la divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ et un équivalent (lorsque n tend vers $+\infty$) de S_n.
4. Vérifier que les suites de terme général $a_n = S_n - \ln(n)$ et $b_n = S_n - \ln(n+1)$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
5. On notera $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Ce réel est appelé constante d'Euler. Montrer que $\gamma > 0$.
6. Justifier l'écriture $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
7. Justifier alors que la série $\sum \frac{1}{n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.
   On pourra utiliser l'égalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(2k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}$$

Exercice 14 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1. Expliquer pourquoi la suite (S_n) converge.
   On notera par la suite $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.
2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $\frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$
3. En déduire que, pour tous entiers n et M tels que $1 \leqslant n < M$, on a :
$$\sum_{k=n+1}^{M} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2}$$
4. En notant $R_n = S - S_n$ le reste de la série, quelle majoration de R_n obtient-on ?
5. Déterminer une valeur approchée de S à 10^{-4} près.
   On cherchera un entier n_0 tel que $|S - S_{n_0}| \leqslant 10^{-4}$

Exercice 15 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Calculer et représenter graphiquement $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer que les sous-suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
3. En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.
4. Cette série est-elle absolument convergente ? Qu'illustre cet exemple ?
5. En utilisant les deux suites adjacentes, déterminer une valeur approchée de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ à 10^{-3} près.

5 Plus difficile

Exercice 16

1. Montrer l'existence et calculer $\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
3. Etudier l'absolue convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
4. Calculer $\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}$ pour $t \in [0,1]$.
5. Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

Exercice 17 Pour tout entier $n > 0$, on pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.
2. En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ est convergente.
3. Justifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n e^{-n} \quad \text{(Formule de Stirling)}$$

Exercice 18
Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Justifier que la série $\sum u_n$ converge.
   On note U la somme de la série, U_n la somme partielle d'indice n et R_n le reste d'indice n défini par :
$$R_n = U - U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$
2. Montrer par récurrence que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{n+k+1} \leq \frac{u_{n+1}}{25^k}$$
3. Montrer ensuite que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n \leq \frac{25}{24}u_{n+1}$$
4. En déduire une valeur de n pour laquelle U_n est une valeur approchée de U à 10^{-3} près.

6 Extra

Exercice 19 En vous inspirant de l'exercice 15, prouvez la validité du célèbre
Critère des Séries Alternées (*CSA*) de *G. W. Leibniz* :
si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **décroissante** et **de limite nulle**, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 20

1. Etablir (cf Ex.19) la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. Prouver que
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$$
3. Etudier la convergence de la série de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Quel rapport voyez-vous entre le résultat de la question précédente et le *Critère des séries alternées de Leibniz*, ou encore avec le *Critère de comparaison* pour les *SATP* ?

Exercice 21

Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite de tous les nombres premiers ; prouver que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.

(On pourra utiliser l'équivalence $\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) \sim \frac{1}{p_k}$ *et observer que, si* $\sum v_n$ *est une série à termes positifs :* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sup_{N\geq 1}\{\sum_{n=1}^{N} v_n\}$*).*

Exercice 22 Quelques révisions de trigo !

1. Pourquoi peut-on affirmer que la série de terme général

$$u_n = \arctan\left[\frac{1}{n^2+3n+3}\right]$$

converge ?

2. Pour $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $x = \tan(\theta)$, établir la validité des identités

$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. Pour x et $y > 0$, établir la validité de l'identité

$$\arctan y - \arctan x = \arctan\left(\frac{y-x}{1+xy}\right)$$

(on pourra utiliser la question précédente, en posant $\theta = \arctan(x)$ *et* $\theta' = \arctan(y)$*).*

4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \arctan(n+2) - \arctan(n+1)$$

Que vaut donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?

Exercice 23 Encore des révisions de trigo :

1. Etablir la convergence de la série $\sum \frac{1}{2^n}\tan(\frac{1}{2^n})$.

2. On rappelle que la fonction cotangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$ par $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
Vérifier que pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\cot\theta - 2\cot 2\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

3. En déduire une présentation commode du terme $\frac{1}{2^n}\tan(\frac{1}{2^n})$ comme différence de deux autres termes, puis évaluer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\tan(\frac{1}{2^n})$ par sommation télescopique.