Chapitre 1 : Séries numériques

TSI 2
Lycée Saint Nicolas

2019 - 2020

Table des matières

1 Généralités **1**
1.1 Définitions et notations 1
1.2 Propriétés 4
1.3 Exemples de référence 6

2 Séries réelles à termes positifs **8**
2.1 Lien avec la monotonie 8
2.2 Règle de comparaison, règle d'équivalence 8
2.3 Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert 11
2.4 Séries de Riemann 13

3 Séries absolument convergentes **15**

4 Développement décimal d'un réel **16**

Dans ce chapitre, les suites considérées seront à valeurs réelles ou complexes.

1 Généralités

1.1 Définitions et notations

Définition :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

i) On appelle **somme partielle au rang** n le terme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

ii) On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum u_n$.

Exemple

La série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.

La somme partielle associée s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ses premiers termes valent :

Remarque :

Pour toute série, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ (ou encore : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$).

Définition :

i) On dit que la série de terme général u_n est **convergente** si la suite des sommes partielles (S_n) est convergente, i.e. s'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = S$.

Le nombre S est alors appelé **somme de la série** et on le note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$.

ii) Dans le cas contraire (ie si (S_n) diverge), on dit que la série est **divergente**.

iii) Enfin, donner la **nature** d'une série, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

Attention :

Ne pas confondre :

— la convergence de la suite (u_n), i.e. l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

— la convergence de la série $\sum u_n$, i.e. l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exemples

i) Les séries $\sum 1$, $\sum n$ et $\sum (-1)^n$ sont divergentes.

ii) La série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge.

Définition :

Si la série $\sum u_n$ converge vers S, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Cette quantité s'appelle le **reste d'ordre** n de la série $\sum u_n$.

Remarque :

(R_n) converge vers 0.

Exemple

Calcul du reste d'ordre n de la série $\sum \frac{1}{2^n}$.

1.2 Propriétés

Propriété :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

i) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

ii) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \lambda u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

iii) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Démonstration :

Remarque :

On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes.

Propriété : *Condition nécessaire de convergence d'une série*

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Démonstration :

Remarque :

i) La réciproque est fausse. Considérons la série $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Son terme général tend vers 0 et cette série diverge.

Un autre contre-exemple, **à connaître par coeur**, est celui de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, voir plus loin.

ii) On utilisera souvent la contraposée de la proposition précédente, i.e. si (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dit alors que la série **diverge grossièrement**.

Par exemple, $\sum 2^n$ diverge grossièrement.

Propriété :

La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration :

Exemple : Utilisation de séries télescopiques

Nature de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et calcul de sa somme.

1.3 Exemples de référence

Propriété :

Soit $q \in \mathbb{C}$. La **série géométrique** $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ et $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Démonstration :

Propriété :

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Démonstration :

Propriété :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement $\alpha > 1$.

Démonstration : voir le chapitre 5 sur les intégrales impropres (théorème de comparaison série-intégrale).

2 Séries réelles à termes positifs

Remarque :
Dans cette partie, chaque série sera réelle et à termes positifs. Les résultats pourront ensuite être appliqués aux séries dont le terme général est de signe constant (i.e. toujours positif, ou bien toujours négatif). En effet, les séries $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature.

2.1 Lien avec la monotonie

Propriété :
Une série $\sum u_n$ à termes positifs converge si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.

Si celle-ci diverge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et on écrira $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration :

2.2 Règle de comparaison, règle d'équivalence

Propriété : *Règle de comparaison*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration :

Exemple

Nature de $\sum \frac{1}{n^2}$.

Propriété : *Règle d'équivalence*

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors ces deux séries sont de même nature.

Démonstration :

Exemple
Nature de $\sum \frac{1}{1+2^n}$.

Exemple
Nature de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (3 méthodes).

2.3 Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert

Propriété :
Soit (u_n) une suite strictement positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et telle que :
$\exists \alpha \in [0,1[, \quad \forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$.
Alors $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration :

Propriété : *Règle de d'Alembert*

Soit (u_n) une suite strictement positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors :

i) Si $0 \leq l < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

ii) Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

iii) Si $l = 1$, on ne peut rien dire.

Démonstration :

Remarque :

La règle de d'Alembert ne permet pas toujours de conclure, par exemple pour les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Exemple

Nature de $\sum \frac{1}{n!}$.

2.4 Séries de Riemann

Propriété : *Séries de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : voir le chapitre 5 sur les intégrales impropres (théorème de comparaison série-intégrale).

Comparaison d'une série $\sum u_n$ à termes positifs à une série de Riemann

On étudie le produit $n^\alpha u_n$:

i) S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

ii) S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemples

i) Nature de $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$.

ii) Nature de $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$.

3 Séries absolument convergentes

Définition :
Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Propriété : *(admise)*
Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque :
La réciproque est fausse (Par exemple la série harmonique alternée).

Exemple : Nature de $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$.

Propriété :
Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration :

4 Développement décimal d'un réel

Exemples

i) 1,35789158312=

ii) 0,3333...=

Définition :

On appelle **développement décimal** d'un réel x toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

i) $a_0 \in \mathbb{Z}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

iii) $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$

Exemple

i) 0,9999...=

Définition :
On dit qu'un développement décimal d'un réel x est **propre** si la suite (a_n) n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang à 9, i.e. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq N$ tel que $a_m \neq 9$

Théorème : *(admis)*
Tout réel admet un unique développement décimal propre.

Remarque :
La démonstration se fait à l'aide de la suite (a_n) définie par :

$$a_0 = \lfloor x \rfloor \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$$

Exemple

i) $x = 1,35789158312$

Définition :
Soit (a_n) la représentation décimale propre d'un réel x.
Alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ est appelé **approximation décimale par défaut** à 10^{-n} près de x et $S_n + \dfrac{1}{10^n}$ **approximation décimale par excès** à 10^{-n} près de x.

Exemple

i) $x = 1,35789158312$

Propriété : *(admise)*
Un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Exemples

i) $x = \dfrac{22}{7}$

ii) $x = 0,1\ 4203\ 4203\ 4203\ \ldots$